

## MODELO DSGE E A CURVA DE JUROS NO BRASIL

Luiz Alberto D'Ávila de Araújo (Banco do Brasil)  
Joaquim Pinto de Andrade (UNB)

### Resumo

Este artigo analisa o DSGE com estrutura a termo de juros para o Brasil. Estimamos um modelo que incorpora os dados da estrutura a termo de taxas de juros com a hipótese das expectativas. Assim, o estimador GMM foi escolhido para identificar os parâmetros estruturais brasileiros e o modelo VAR para identificar as respostas contemporâneas da curva de juros aos choques macroeconômicos. A conclusão mostra que o choque de metas de inflação no Brasil domina a variação nos fatores "nível e inclinação", enquanto que os choques de política monetária dominam a variação do fator "curvatura".

### Abstract

This article investigates DSGE with term structure in Brazil. We estimate a model that incorporate term structure data under the expectations hypothesis. Thus, adopt GMM estimator to identify Brazilian structural parameters and VAR model to evaluate contemporaneous responses of the yield curve to macroeconomic shocks. The conclusion shows the inflation target shock in Brazil dominates the variation in the "level and slope factors" whereas monetary policy shocks dominate the variation in the "curvature factor."

## 1 Introdução

Este artigo estima um modelo para estrutura a termo dos juros praticados no mercado financeiro brasileiro, inserido dentro do modelo dos novos keynesiano. Com a inclusão da curva de juros espera-se melhorar os parâmetros do modelo DSGE, em virtude da incorporação das variáveis que não são observáveis.

Ao estimar, simultaneamente, os efeitos macroeconômicos sobre a estrutura a termo de taxas de juros e o efeito do termo das taxas de juros sobre a macroeconomia, contribui com as pesquisas empíricas que avaliam a economia brasileira.

O artigo vai utilizar um modelo estrutural composto pela curva IS que representa a demanda agregada, pela curva de Phillips que indica a oferta agregada e pela regra de política monetária, segundo Bekaert, Cho e Moreno (2010).

A estrutura a termo de taxas de juros será incorporada pelo diferencial entre as taxas de longo e de curto prazo (spread do termo), onde a taxa de juros de curto prazo é a taxa que representa a condução da política monetária. A importância de estudar o *spread* do termo é a possibilidade de interpretar seus efeitos, pois ao incorporar o spread do termo podemos analisar as expectativas do mercado financeiro quanto à taxa de inflação e de juros contidas na estrutura a termo das taxas de juros.

O artigo está estruturado, além desta introdução, na seção 2 que traz a revisão da literatura macroeconômica e da estrutura a termo de juros, na seção 3 que deduz a curva de juros a partir do modelo DSGE, na seção 4 com a avaliação empírica da economia brasileira e com uma conclusão sucinta descrita na seção 5.

Ao final espera-se discriminar o impacto da estrutura a termo de juros sobre os coeficientes da inflação, produto e taxa básica de juros do banco central, ao mesmo tempo, em que avalia o impacto dos choques macroeconômicos no comportamento dos fatores latentes nível, inclinação e curvatura, que descrevem a estrutura a termo de taxas de juros.

## 2 Macroeconomia e Estrutura a Termo de Taxas de Juros

A teoria macroeconômica dos novos keynesianos é a teoria que fornece fundamentos microeconômicos num ambiente onde prevalece a hipótese de expectativas racionais.

A principal premissa dos novos keynesianos é que famílias e empresas possuem expectativas racionais, cujos preços e salários são "viscosos" e não permitem ajustes instantâneos às mudanças nas condições econômicas. Essa rigidez nos preços e as falhas de mercado implicam que uma das situações possíveis é a economia não atingir o pleno emprego.

Um aspecto relevante na teoria novo keynesiana é que a taxa natural de juros pode ser definida com a taxa encontrada em equilíbrio com expectativas racionais e preços flexíveis. Essa taxa natural possui três propriedades: (a) é a taxa de juros de um período, (b) é a taxa real de juros no equilíbrio período a período e (c) é uma taxa que está sujeita a variações de curto e longo prazo.

Dentro desses conceitos é introduzida a política monetária para manter a estabilização dos preços e a expansão monetária no curto prazo atua como resposta a choques inesperados que afetam a economia e diminuem o produto e tragam instabilidade para a taxa de inflação, conforme Woodford (2003) e Galí (2008).

Eventuais desvios na taxa de juro de curto prazo em relação aos movimentos na taxa de juro de longo prazo devem ser considerados como desvios da taxa natural de juros e seus reflexos devem ser incorporados ao modelo estrutural da economia para avaliar o impacto na magnitude do parâmetro estrutural e nas trajetórias das variáveis macroeconômicas.

Portanto, trata-se de um modelo parcimonioso que não descreve os efeitos da estrutura a termo dos juros. Com isso, vamos buscar uma interpretação fora da

macroeconomia para entender os movimentos da curva de juros, no caso, na literatura microeconômica, para explicar sua formação e derivar a curva de juros dentro do modelo novo keynesiano.

A literatura financeira de estrutura a termo de juros começa com a definição da existência de oportunidades de arbitragem e com o esclarecimento de sua importância para o equilíbrio de uma economia. Note que as oportunidades de arbitragem podem ser de dois tipos. A “*arbitragem do primeiro tipo*” ocorre quando existe uma estratégia de negociação e uma carteira de ativos, cujo valor corrente da carteira é igual a zero e o valor futuro da carteira na data final é não negativo com probabilidade unitária e estritamente positivo com probabilidade positiva. As “*oportunidades de arbitragem do segundo tipo*” existem quando uma estratégia de negociação é tal que o valor corrente da carteira é negativo com probabilidade unitária e o valor final não negativo.

A existência de uma oportunidade de arbitragem do primeiro tipo numa economia ocorre se, e somente se, existe uma oportunidade de arbitragem do primeiro tipo equivalente nessa economia, onde os preços são expressos em termos do valor de um ativo do mercado monetário que é localmente livre de risco.

Com as condições necessárias garantimos que não existem oportunidades de arbitragem na economia e, assim, sabemos que existe um único preço associado a qualquer direito contingente atingível que satisfaz essas condições. Com isso, a premissa de não existência de arbitragem centra-se na ocorrência de um ajuste perfeito da estrutura a termo num ponto do tempo. A opção de modelagem da estrutura de juros pela não arbitragem, considerando a abordagem na qual a curva de juros de curto prazo é exógena e obtida diretamente do mercado financeiro, foi apresentada por Hull e White (1990) e Heath, Jarrow e Morton (1992).

Por outro lado, a abordagem de equilíbrio com não arbitragem onde a taxa de juros de curto prazo é incorporada de forma endógena na modelagem da dinâmica da estrutura a termo das taxas de juros, no denominado modelo afim, foi apresentada nas contribuições de Merton (1973), Vasicek (1977) e Cox, Ingersoll e Ross (1985).

Merton (1973) deduz um conjunto de restrições sobre a precificação de opções para torná-la consistente com a teoria de precificação racional dos títulos, explicitando fórmulas de precificação das opções de compra e de venda que permitiram extensões na teoria de precificação dos passivos corporativos.

Vasicek (1977) derivou uma forma geral da estrutura a termo de taxas de juros com as premissas de que a taxa spot segue um processo difusão, onde o preço do título descontado depende somente da taxa spot sobre seu termo e que o mercado é eficiente. Assim, mostrou por meio do argumento de arbitragem que a taxa esperada de retorno de qualquer título que excede a taxa spot é proporcional ao seu desvio padrão.

O modelo CIR é um modelo de equilíbrio geral, com uma descrição intertemporal completa de uma economia competitiva em tempo contínuo. A economia é composta por indivíduos idênticos que maximizam uma função objetivo, representada pela função utilidade do tipo Von Neumann-Morgenstern composta por consumo e pelo estado da tecnologia. No equilíbrio da sociedade homogênea, a taxa de juros e a taxa de retorno esperada sobre os direitos contingentes precisam se ajustar até que toda riqueza seja investida num processo de produção. O investimento pode ser feito pelos indivíduos ou pelas firmas, o valor de equilíbrio é dado pela solução do problema com um único produto físico. A trajetória da variável-estado é dada por uma equação diferencial estocástica do tipo  $dY(t) = [\xi Y + \varsigma]dt + \nu \sqrt{Y} dW(t)$  e a dinâmica das taxas de juros pode ser expressa como  $dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma \sqrt{r(t)} dW(t)$ .

O comportamento da taxa de juros que está implícito na estrutura CIR segue as seguintes propriedades: (a) as taxas de juros negativas são excluídas, (b) se a taxa de juros atinge o valor zero, em seguida será positiva, (c) a variância absoluta da taxa de juros aumenta quando a taxa de juros aumenta, e (d) existe uma distribuição no estado estacionário para a taxa de juros.

A inclusão da estrutura a termo no modelo novo keynesiano, assumindo a condição de não existência de arbitragem e a introdução de heterocedasticidade na forma de raiz quadrada, vai permitir derivarmos o modelo CIR dentro do modelo DSGE.

Um dos trabalhos pioneiros que procurou interpretar os resultados macroeconômicos em conjunto com a curva de juros foi Bekaert, Cho e Moreno (2010), cujos resultados procuraremos analisar na economia brasileira.

### 3 Modelo DSGE com estrutura a termo sem arbitragem

Nesta seção procuramos esclarecer como a estrutura a termo de taxas de juros está inserida no modelo de equilíbrio geral dinâmico estocástico, seguindo Bekaert, Cho e Moreno (2010).

Note que o modelo macroeconômico novo keynesiano é representado por um sistema de equações simultâneas com três equações: a curva IS, a curva de Phillips e a regra de política monetária.

Esse sistema de equações fornece uma representação estrutural da economia dentro da visão novo keynesiana, mas não trata de forma explícita como a estrutura a termo de juros está inserida no modelo e como os movimentos da curva de juros e a atuação da autoridade monetária podem estar sincronizados para responder a movimentos transitórios que podem afetar o nível natural de longo prazo da economia e, talvez, criar alguma persistência adicional.

Ao resolver o problema acima, a condição de maximização de primeira ordem do consumidor termina numa equação que caracteriza seu comportamento maximizador. Na interpretação mais simples desse problema, segundo Galí (2008), temos:

$$Q_t = E_t \left\{ \beta \frac{U_{c,t+1} P_t}{U_{c,t} P_{t+1}} \right\}$$

Note que essa equação pode se interpretada como uma equação de precificação dos títulos mantidos pelas famílias para acumular riqueza. Essa equação mais simples possibilita obter dois componentes. Um *pay-off* representado por  $x_{t+1}$  e um fator de desconto responsável por trazer o valor desse *pay-off* no tempo futuro para o tempo presente e que é representado por  $m_{t+1}$ , isto é  $Q_t = E_t \{m_{t+1} x_{t+1}\}$ . Observe que o fator de desconto  $m_{t+1} = 1/E_t \{ \beta (U_{c,t+1} / U_{c,t}) \}$  indica a diferença entre o consumo presente em relação ao consumo futuro, em condições normais. Por outro lado, o *pay-off*  $x_{t+1} = 1/\pi_{t+1} = P_t / P_{t+1}$  representa a relação entre os preços presentes e futuros.

Cochrane (2001) mostrou que essa equação representa o princípio fundamental da precificação de qualquer ativo contingente e indica que o preço de um ativo é formado pela expectativa do seu *pay-off* descontado por um fator de ajuste associado com a aversão ao risco. Em outras palavras, o preço de um ativo é formado pelo fator que representa a taxa marginal de substituição intertemporal do consumo, também conhecida como fator de desconto estocástico ou processo do núcleo de precificação (*pricing kernel process*).

Note que esse fator de desconto estocástico é o elo que permite a incorporação da estrutura a termo de taxas de juros no modelo novo keynesiano padrão.

Vamos começar a explicação do modelo a ser estimado para a economia brasileira pelo consumidor representativo, cujo problema é maximizar sua função de utilidade sujeita à uma restrição orçamentária:

$$\begin{aligned} \text{Max } E_t \sum_{s=t}^{\infty} \psi^{s-t} U(C_s N_s; F_x) &= E_t \sum_{s=t}^{\infty} \psi^{s-t} \left[ \frac{F_s C_s^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_s^{1+\chi}}{1+\chi} \right] \\ \text{s.a: } P_t C_t + d_t' Q_t &\leq W_t N_t + (D_t + Q_t)' d_{t-1} \\ \lim_{T \rightarrow \infty} E_t \{B_T\} &\geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Onde o fator de mudança ou de deslocamento da demanda agregada assume a forma  $F_t = H_t G_t$ , com  $H_t$  sendo o nível de hábito externo que é exógeno ao agente e depende do consumo passado e  $G_t$  representando o choque exógeno de demanda agregada que pode ser interpretado como choque de preferência sobre o consumo. A persistência endógena do produto é criada conforme Fuhrrer (2000), isto é,  $H_t = C_{t-1}^\eta$  e  $\eta$  mede o grau de dependência do hábito sobre o nível de consumo passado. Essa persistência do hábito tem uma relação linear com a persistência do hábito de Fuhrrer (2000), que é da forma  $\eta = h(\sigma - 1)$ , onde  $h$  é o parâmetro de persistência do hábito em Fuhrrer.

A formação de hábito cria uma persistência no produto, fazendo com que o produto precise de um tempo maior para retornar a seu nível natural, após sofrer um choque. Vamos considerar a função utilidade do tipo Lucas (1978), onde encontramos  $U(C_t, N_t; F_t) = \left[ (F_t C_t^{1-\sigma} - 1) / (1-\sigma) \right] - [N_t^{1+\chi} / 1 + \chi]$ . Note que  $\sigma$  é o coeficiente de aversão ao risco ou elasticidade intertemporal inversa do consumo,  $\chi$  é a elasticidade intertemporal inversa da oferta de trabalho,  $F_t$  é o fator de mudança da demanda agregada com componente de hábito externo e outro de choque exógeno na demanda agregada.

Em seguida, temos que encontrar a oferta de trabalho:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial N_t} &= \psi^{t-t} F_t U_{C,t} \left( \frac{W_t}{P_t} \right) - \psi^{t-t} U_{N,t} = 0 \\ \frac{W_t}{P_t} &= \frac{N_t^\chi}{C_t^{1-\sigma} F_t} \quad (2) \end{aligned}$$

Posteriormente, temos que obter a curva IS, maximizando a função objetivo com respeito ao vetor de pesos que compõe a carteira de ativos das famílias:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial d_t} &= \psi^{t-t} F_t U_{C,t} \left( \frac{Q_t}{P_t} \right) - \psi^{t+1-t} F_{t+1} U_{C,t+1} \left( \frac{D_{t+1} + Q_{t+1}}{P_{t+1}} \right) = 0 \\ \frac{Q_t}{D_{t+1} + Q_{t+1}} &= \psi \frac{C_{t+1}^{-\sigma} F_{t+1}}{C_t^{-\sigma} F_t} \frac{P_t}{P_{t+1}} \quad (3) \end{aligned}$$

Pelas equações anteriores e pela condição de equilíbrio de mercado, obtemos:

$$M_{t+1} = \psi \frac{Y_{t+1}^{-\sigma} F_{t+1}}{Y_t^{-\sigma} F_t} \frac{P_t}{P_{t+1}} \quad (4)$$

Assim. Encontramos a curva IS log-linearizada:

$$y_t = \alpha_{IS} + \mu E_t y_{t+1} + (1-\mu) y_{t-1} - \phi(i_t - E_t \pi_{t+1}) + \varepsilon_{IS,t} \quad (5)$$

Onde  $y_t$  é o hiato do produto dessazonalizado,  $i_t$  é a taxa de juros de curto prazo,

$\phi = \frac{1}{\sigma + \eta}$  e  $\mu = \sigma \phi$ , com  $\phi$  representando a resposta do produto dessazonalizado às mudanças na taxa de juros real. Além disso,  $\alpha_{IS} = -\phi(\log \psi + 0,5V_t(m_{t+1}))$  e o choque da curva IS é igual a  $\varepsilon_{IS,t} = \phi(g_{t+1} - g_t)$  e é independente e identicamente distribuído, com

variância homocedástica  $\sigma_{IS}^2$ . Note que  $V_t(m_{t+1})$  depende da dinâmica da variável estado do modelo, se as inovações do modelo forem homocedástica, então a variância do núcleo de precificação é constante.

Em seguida, devemos encontrar a curva de Phillips (AS), a partir da maximização do lucro das firmas, obtendo:

$$\pi_t = \delta_1 E_t[\pi_{t+1}] + \delta_2 \pi_{t-1} + \bar{\omega}[(\chi + \sigma)(y_t - y_t^n - \lambda(y_{t-1} - y_{t-1}^n))] - g_t - (1 + \chi) \ln \xi_t]$$

Fazendo  $\kappa = \bar{\omega}(\sigma + \chi)$ ,  $\varepsilon_{IS,t} = g_t$  e  $\varepsilon_{AS,t} = -\bar{\omega}(1 + \chi) \ln \xi_t$ , temos:

$$\pi_t = \delta_1 E_t[\pi_{t+1}] + \delta_2 \pi_{t-1} - \kappa(y_t - y_t^n) - \lambda_{cp}(y_{t-1} - y_{t-1}^n) - \zeta \varepsilon_{IS,t} + \varepsilon_{AS,t}$$

Note que os choques entram na curva de Phillips e que  $\zeta = \bar{\omega}(\sigma + \eta)$  porque

$$\kappa = \bar{\omega}(\sigma + \chi) \therefore \bar{\omega} = \frac{\kappa}{(\sigma + \chi)}$$

O choque tecnológico da curva IS entra na equação AS (ou curva de Phillips) devido ao custo marginal depender dos choques de demanda agregada que são exógenos  $G_t$ .

Entretanto, dependendo da especificação que adotamos para  $\hat{s}_t$  podemos estimar o modelo desconsiderando o impacto do choque tecnológico da curva IS e o hiato entre o produto real e o produto natural, obtendo a seguinte curva de Phillips:

$$\pi_t = \delta_1 E_t[\pi_{t+1}] + \delta_2 \pi_{t-1} - \kappa(y_t - y_t^n) + \varepsilon_{AS,t} \quad (6)$$

Na equação está implícito o problema de Calvo (1983), onde  $\theta$  representa a fração que mantém seus preços sem alterações no tempo  $t$  e  $\tau$  é o grau de indexação da inflação

passada,  $\tau \in [0,1]$ , uma vez que  $P_t(i) = P_{t-1}(i) \left[ \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \right]^\tau$ .

A terceira equação é a tradicional regra de política monetária do Banco Central de Clarida, Galí e Gertler (1999), onde a autoridade de monetária estabelece a taxa de juros de curto prazo suavizando as taxas de juros:

$$i_t = \rho i_{t-1} + (1 - \rho) [\bar{i}_t + \beta(E_t \pi_{t+1} - \pi_t^*) + \gamma(y_t - y_t^n)] + \varepsilon_{MP,t}$$

Fazendo  $\alpha_{MP} = (1 - \rho) \bar{i}_t$ , encontramos:

$$i_t = \alpha_{MP} + \rho i_{t-1} + (1 - \rho) [\beta(E_t \pi_{t+1} - \pi_t^*) + \gamma(y_t - y_t^n)] + \varepsilon_{MP,t} \quad (7)$$

Onde  $\rho$  é o parâmetro de suavização,  $\beta$  nebsyra a diferença entre a inflação esperada e a meta de inflação e  $\gamma$  avalia a resposta da regra de política monetária a mudanças no hiato do produto e  $\varepsilon_{MP,t}$  é um choque de política monetária exógeno, com variância homocedástica  $\sigma_{MP}^2$ .

Duas diferenças em relação ao modelo padrão dos novos keynesianos, é a presença da equação para definir a dinâmica do produto natural, de forma endógena, bem como a inclusão da equação da meta de inflação ideal com base nas expectativas do setor privado para a inflação no longo prazo.

Para mostrar que o modelo produz uma dinâmica endógena para o produto natural  $Y_t^n$  e, conseqüentemente, para o hiato do produto, partimos da função de produção  $Y_t = \xi_t N_t$ , Onde  $\xi_t$  é o choque tecnológico independente da produção. Como o custo médio é constante e o custo marginal real é igual ao custo médio, a demanda por trabalho pode ser simplificada para  $\frac{W_t}{P_t} = S_t \xi_t$  e ao igualarmos com a demanda por trabalho, obtemos  $S_t = \xi_t^{-1} N_t^\lambda Y_t^\sigma Y_{t-1}^{-\eta} G_t^{-1}$ ,

podemos reescrever a função de produção como  $N_t = Y_t \xi_t^{-1}$  e com as substituições necessárias encontramos  $S_t = Y_t^{\chi+\sigma} Y_{t-1}^{-\eta} G_t^{-1} \xi_t^{-1-\chi}$ .

Dado o mercado de competição monopolística e normalizando a inovação,  $G_t = \xi_t = 1$ , então  $Y_t^n$  será o nível do produto que satisfaz ao custo marginal do tipo  $S_t^n = (Y_t^n)^{\chi+\sigma} (Y_{t-1}^n)^{-\eta}$ . Portanto, o nível de produto natural satisfaz o fato de que o custo marginal no estado estacionário é igual ao *markup* sobre o preço  $S_t^n = \frac{1}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$ , e substituindo

temos que  $(Y_t^n)^{\chi+\sigma} (Y_{t-1}^n)^{-\eta} = \frac{1}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$ . Ao log-linearizarmos a equação encontramos a equação

para o produto natural,  $y_t^n = -\frac{1}{(\chi+\sigma)} \log\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\right) + \frac{\eta}{(\chi+\sigma)} y_{t-1}^n$ .

$$y_t^n = \alpha_{y^n} + \lambda y_{t-1}^n + \varepsilon_{y^n,t} \quad (8)$$

Onde  $\alpha_{y^n} = -\frac{1}{(\chi+\sigma)} \log\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\right)$  e  $\lambda$  é a taxa de persistência do produto natural,

onde  $\lambda = \frac{\eta}{(\chi+\sigma)}$ ,  $\vartheta$  é o relacionamento entre a persistência endógena do produto natural sobre a resposta do produto natural corrente a mudanças no produto real com  $\vartheta = \lambda/(1-\mu)$  e  $\varepsilon_{y^n,t}$  é o choque de markup shock com variância  $\sigma_{y^n}$ .

Para encontrar a equação de meta de inflação endógena, o valor esperado de longo prazo da inflação  $\pi_t^{LR}$  é definido como a média ponderada de todas as taxas de inflação futuras  $\pi_t^{LR} = (1-d) \sum_{j=0}^{\infty} d^j E_t \pi_{t+j}$ , com  $0 < d < 1$ , que representa a solução da equação de  $\pi_t^{LR} = d E_t \pi_{t+j} + (1-d) \pi_t$ . Portanto, se  $d = 0$  temos uma igualdade entre a inflação de longo prazo e a inflação corrente  $\pi_t^{LR} = \pi_t$  e quando  $d = 1$  temos a inflação de longo prazo aproximando-se da inflação esperada  $\pi_t^{LR} \rightarrow E_t \pi_{t+1}^{LR}$ , indicando que a inflação esperada não está condicionada a inflação corrente.

Assumindo a premissa que a autoridade monetária procura suavizar as mudanças na meta de inflação encontramos  $\pi_t^* = \omega \pi_{t-1}^* + (1-\omega) \pi_t^{LR} + \varepsilon_{\pi^*,t}$ , onde  $\varepsilon_{\pi^*,t}$  é um erro aleatório que caracteriza uma mudança exógena na postura da política monetária em relação à taxa de inflação de longo prazo ou em relação à meta de inflação.

$$\pi_t^* = \varphi_1 E_t \pi_{t+1}^* + \varphi_2 \pi_{t-1}^* + \varphi_3 \pi_t + \varepsilon_{\pi^*,t} \quad (9)$$

Onde  $\varphi_1 = \frac{d}{1+d\omega}$ ,  $\varphi_2 = \frac{\omega}{1+d\omega}$ ,  $\varphi_3 = 1 - \varphi_1 - \varphi_2$  e  $\omega$  é o peso da meta de inflação passada na meta de inflação e  $(1-d)$  é o peso da inflação corrente na construção da meta de inflação de longo prazo.

As cinco equações que caracterizam a trajetória das variáveis macroeconômicas são:

$$y_t = \alpha_{IS} + \mu E_t y_{t+1} + (1-\mu) y_{t-1} - \phi(i_t - E_t \pi_{t+1}) + \varepsilon_{IS,t}$$

$$\pi_t = \delta E_t \pi_{t+1} + (1-\delta) \pi_{t-1} - \kappa(y_t - y_t^n) + \varepsilon_{AS,t}$$

$$i_t = \alpha_{MP} + \rho i_{t-1} + (1-\rho) \bar{i}_t + \beta (E_t \pi_{t+1} - \pi_t^*) + \gamma (y_t - y_t^n) + \varepsilon_{MP,t} \quad (10)$$

$$y_t^n = \alpha_{y^n} + \lambda y_{t-1}^n + \varepsilon_{y^n,t}$$

$$\pi_t^* = \varphi_1 E_t \pi_{t+1}^* + \varphi_2 \pi_{t-1}^* + \varphi_3 \pi_t + \varepsilon_{\pi^*,t}$$

Esse sistema pode ser descrito na forma matricial, com  $x_t = (\pi_t \quad y_t \quad i_t \quad y_t^n \quad \pi_t^*)'$  e  $\varepsilon_t = (\varepsilon_{AS,t} \quad \varepsilon_{IS,t} \quad \varepsilon_{MP,t} \quad \varepsilon_{y^n,t} \quad \varepsilon_{\pi^*,t})'$ :

$$Bx_t = \alpha + AE_t x_{t+1} + Jx_{t-1} + C\varepsilon_t \quad (11)$$

A premissa de expectativas racionais e sem informação assimétrica entre agentes econômicos e autoridade de política monetária implica que  $x_{t+1} = E_t x_{t+1} + v_{t+1}$ , com  $v_{t+1}$  sendo o vetor de erros com expectativas racionais. Assim, percebemos que a equação (11) é uma solução na forma reduzida com expectativas racionais, onde  $E_t v_{t+1} = 0$ .

Assim, a forma reduzida que corresponde a um simples modelo de VAR de primeira ordem com restrições não lineares nos parâmetros:

$$x_t = c + \Omega x_{t-1} + v_t \quad (12)$$

Agora, o próximo passo é explicitar a curva de juros implícita no modelo DSGE. Para tanto, vamos seguir as premissas do modelo de Cox, Ingersoll e Ross (1985) e estabelecer a dinâmica da variável-estado pela classe das funções afim e assumir que o choque é normalmente distribuído  $\varepsilon_t \sim N(0, D_{t-1})$ , da seguinte forma:

$$m_{t+1} = c_m + A_m' x_t + A_0' v_{t+1} \quad (13)$$

Onde  $c_m$  são elementos em  $c$  correspondendo a log-linearização de  $m_{t+1}$  ao redor do estado estacionário determinístico.  $A_m$  e  $A_0$  são os vetores coluna correspondente de  $\Omega$  e  $\Gamma$  e são funções dos parâmetros estruturais do modelo DSGE. Para seguir os passos do modelo CIR, é necessário manter a premissa de inexistência de oportunidades de arbitragem livre de risco e saber que os agentes comportam-se como se fossem neutros ao risco, existindo ativos com diferentes perfis de risco, então o processo do núcleo de precificação,  $M_{t+1}$ , que determina os preços de todos os títulos assume a forma  $E_t [M_{t+1} RT_{t+1}] = 1$ . Na hipótese de mercados completos e de ausência de oportunidades de arbitragem,  $M_{t+1} > 0$  (conforme Harrison e Kreps, 1979).

Em particular, o preço e o retorno de um título sem cupom com vencimento em  $n$ , são definidos como  $PT_{n,t} = E_t M_{t+1} PT_{n-1,t+1}$  e  $RT_{t+1} = \frac{PT_{n-1,t+1}}{PT_{n,t}}$ , respectivamente. Ao aplicar o operador logaritmo obtemos:

$$pt_{n,t} = E_t [m_{t+1}] + \frac{1}{2} \text{var}_t [m_{t+1}] + pt_{n-1,t+1} \quad (14)$$

Ao efetuar as substituições necessárias para  $n = 1$  e definindo  $PT_{0,t+1} = 1$ , o preço do título com vencimento no período 1 será dado por<sup>1</sup>:

$$-i_t = pt_{1,t} = c_m + A_m' x_t + \frac{1}{2} A_0' q A_0 \quad (15)$$

O último termo é quadrático e estaria ausente num modelo log-linear estrito, mas a sua função aqui é capturar a compensação ao risco para os agentes. Se o fator de desconto

<sup>1</sup> A prova de detalhada da precificação dos títulos e o formato de função afim esta discriminada no final desta seção.



estocástico for do tipo afim como descrito na equação (15), então a equação de precificação do logaritmo dos títulos também ser uma função afim.

Para provar que a equação de precificação do logaritmo dos títulos é uma função afim e, conseqüentemente, o fator de desconto estocástico também assume a forma afim do modelo CIR, vamos começar com o caso  $n=1$  e ao considerar a premissa de  $PT_{0,t+1} = 1$ , temos  $PT_{1,t} = E_t M_{t+1} + 1$ , com operador logaritmo temos  $pt_{1,t} = E_t(m_{t+1}) + \frac{1}{2} Var_t(m_{t+1})$ . Ao considerarmos que a média do termo erro e a variância de uma constante são iguais a zero:

$$pt_{1,t} = c_m + \Lambda'_m x_t + \frac{1}{2} \Lambda'_0 q \Lambda_0 \quad (16)$$

Onde  $q = E(v_{t+1} v'_{t+1})$  e o termo  $\Lambda'_0 q \Lambda_0$  é um termo quadrático que representa a compensação por tomar risco que é exigida pelos agentes. Note que o preço de mercado do risco é dado pelos elementos de  $\Lambda_0$ . Assim, percebe-se que o modelo introduz uma heterocedasticidade na forma de raiz quadrada, segundo Cox, Ingersoll e Ross (1985).

Portanto, a equação de precificação de títulos com vencimento  $n$  é uma função que possui o formato afim que se pretendia encontrar:

$$pt_{n,t} = a_n + b'_n x_t \quad (17)$$

Além disso, percebe-se que a equação de precificação depende das principais variáveis de condução das políticas macroeconômicas:

$$pt_{n,t} = a_n + b'_n \begin{bmatrix} \pi_t \\ y_t \\ i_t \\ y_t^n \\ \pi_t^* \end{bmatrix}$$

Onde  $pt_{n,t}$  é o preço no período  $t$  de um título cujo vencimento ocorrerá em  $t+n$ .

A condição de não arbitragem é mantida por construção e o modelo log-normal implica que a precificação do título de um período é:

$$E_t[m_{t+1}] + \frac{1}{2} Var_t[m_{t+1}] = -i_t$$

Como a equação de precificação dos títulos é uma função afim do tipo:

$$pt_{n,t} = E_t(m_{t+1} + pt_{n-1,t+1}) + \frac{1}{2} Var_t(m_{t+1} + pt_{n-1,t+1})$$

E pela indução verificada nos argumentos anteriores:

$$a_n = a_{n-1} + b'_{n-1} c + \frac{1}{2} b'_{n-1} \Gamma D \Gamma' b_{n-1} - \Lambda' D \Gamma' b_{n-1}$$

$$b'_n = -e'_3 + b'_{n-1} \Omega$$

Para obter o spread do termo, note que o logaritmo do preço do título é conhecido e corresponde ao logaritmo de seu valor de face (*zero coupon bond* tem preço conhecido no vencimento com certeza), considerando o retorno desse título para  $n$  períodos à frente é possível fazer uma relação entre a precificação do títulos e a curva de rendimento (*yield curve* ou estrutura a termo de taxas de juros) mensurada pelo *spread* do termo:

$$\log(RT_{t+1}) = \frac{-\log(PT_{n,t})}{n}$$

Substituindo e aplicando logaritmo do retorno do título (yield curve):

$$\log(RT_{t+1}) = -\frac{a_n}{n} - \frac{b_n}{n} x_t$$

O *spread* da estrutura a termo corresponde à diferença entre a taxa de juros (ou retorno) de um título com vencimento para  $n$  períodos à frente (longo prazo) e a taxa de juros de curto prazo:

$$\begin{aligned} sp_{n,t} &= \log(RT_{n,t}) - \log(RT_{1,t}) \\ sp_{n,t} &= -\frac{a_n}{n} - \left( \frac{b_n}{n} + \varepsilon_3 \right) x_t \end{aligned} \quad (18)$$

Onde o *spread*  $sp_{n,t} \equiv \log(RT_{t+1}) - i_t$  é o *spread* entre o rendimento com  $n$  períodos e a taxa de juros de curto prazo.

Portanto, o modelo fornece uma dinâmica conjunta das variáveis macroeconômicas e dos *spreads* dos termos, representada pelo sistema:

$$x_t = c + \Omega x_{t-1} + \Gamma \varepsilon_t \quad (19)$$

$$z_t = A_z + B_z x_t \quad (20)$$

Onde  $n_1$  e  $n_2$  referem-se a dois diferentes vencimentos para os rendimentos para *spread* dos títulos de longo prazo,  $x_t = [\pi_t \ y_t \ i_t \ y_t^n \ \pi_t^*]$  e  $z_t = [\pi_t \ y_t \ i_t \ sp_{n_1,t} \ sp_{n_2,t}]$ . Note que  $n_1$  e  $n_2$  referem-se a dois diferentes vencimentos para os rendimentos dos títulos de longo prazo, ou seja, aos dois *spreads* dos termos de longo prazo.

## 4 Análise Empírica na Economia Brasileira

Esta seção testa as implicações do modelo teórico da seção anterior. A subseção 4.1 apresenta os dados da economia brasileira e a subseção 4.2 mostra a metodologia empírica. Na subseção 4.3 apresentamos os resultados empíricos que são robustos e relevantes para a teoria macroeconômica e da curva de juros.

### 4.1 Dados Brasileiros

A base de dados utilizada na avaliação empírica da economia brasileira corresponde aos valores trimestrais, obtidos entre os meses de março de 1996 e dezembro de 2010. O produto da economia brasileira mensurado pelo Produto Interno Bruto a Preços de Mercado, a Produção Física industrial e a taxa de inflação medida pelo Índice Nacional de Preços ao Consumidor - Amplo (IPCA) para 12 meses, foram obtidos junto ao Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, a taxa de política monetária e as metas de inflação foram consideradas como sendo a taxa média Selic e as metas de inflação constantes no relatório de inflação do Banco Central do Brasil.

A estrutura a termo de taxas de juros da economia brasileira foi construída com base nas séries históricas da taxa CDI diária e das operações no mercado de futuros Pré x DI, cujas bases estão referendadas pelas informações disponibilizadas pela BM&F-Bovespa. A taxa de um dia corresponde à taxa CDI e os vencimentos futuros avaliados correspondem aos vértices de seis meses e um ano calculados com base no PU dos futuros pré x DI. Também analisamos a evolução temporal dos termos de três e seis meses, bem como, um, dois, cinco e dez anos.

**Tabela 1 – Estatística Descritiva e Correlação – 1996 a 2010**

	Média	Mediana	Mínimo	Máximo	Desvio-pad	C.V.	Assimetria	Curtose
ipca	6.836	6.060	1.645	20.550	3.613	0.529	1.612	2.529
II	102.920	103.430	82.530	120.170	6.472	0.063	-0.377	0.934
Selic	18.549	18.071	8.650	45.902	7.228	0.390	1.291	2.119
ETTJ3m	17.047	16.923	8.266	39.015	5.888	0.345	0.918	1.225
ETTJ6m	17.290	17.013	8.337	39.093	5.916	0.342	0.795	0.834
ETTJ1a	17.585	16.723	8.728	39.132	5.945	0.338	0.749	0.531
ETTJ2a	17.874	16.562	9.906	39.151	5.921	0.331	0.779	0.381
ETTJ5a	18.102	16.574	9.696	39.163	5.998	0.331	0.804	0.224
ETTJ10a	18.208	16.608	9.601	39.167	6.084	0.334	0.821	0.189

Matriz de Correlação									
	ipca	II	Selic	ETTJ3m	ETTJ6m	ETTJ1a	ETTJ2a	ETTJ5a	ETTJ10a
ipca	1	-0.0176	0.2648	0.3133	0.3173	0.3191	0.3279	0.3557	0.3742
II		1	-0.2948	-0.2548	-0.2290	-0.2062	-0.2067	-0.2294	-0.2450
Selic			1	0.9636	0.9396	0.9118	0.8895	0.8707	0.8596
ETTJ3m				1	0.9944	0.9794	0.9627	0.9440	0.9313
ETTJ6m					1	0.9947	0.9831	0.9656	0.9522
ETTJ1a						1	0.9959	0.9823	0.9695
ETTJ2a							1	0.9940	0.9846
ETTJ5a								1	0.9977
ETTJ10a									1

Obs: Coeficientes de Correlação utilizando observações de 1996:03 a 2010:12, 5% de valor crítico (bilateral) = 0,1471 para n=178.

As estatísticas descritivas e a correlação, para o período de maio/1996 a dezembro/2010, estão discriminadas na tabela 1. O valor médio da estrutura a termo de taxas de juros do mercado financeiro apresenta uma curva de juros levemente inclinada de forma positiva, passando de 17,04% para três meses a 18,20% para dez anos – diferença entre 10 anos e 6 meses de 1,16% que representa 6% da taxa de 10 anos. Em particular, pode-se observar que a volatilidade medida pelo desvio padrão pouco aumenta com o aumento no termo da estrutura de juros. Adicionalmente, percebe-se que a correlação entre a taxa de inflação e os vértices da estrutura a termo de juros praticada no mercado financeiro é pouco significativa, entre 0,31 e 0,37. Por outro lado, a correlação entre a taxa Selic e as taxas da estrutura a termo de juros são expressivas, ficando entre 0,96 e 0,85. Por último, a correlação entre Selic e o IPCA apresenta diferenças dependendo do período da amostra avaliado: de mai/1996 a dez/2010 ficou em 0,26; de fev/1999 a dez/2010 ficou em 0,45 e de jan/2000 a dez/2010 ficou em 0,81. Esse comportamento entre a inflação e a taxa básica de juros mostra a mudança da postura de atuação política monetária por parte do Banco Central do Brasil que, a partir de fevereiro de 1999, adotou o sistema de metas de inflação centrado na taxa de inflação medida pelo IPCA.

A tabela 2 discrimina as funções de autocorrelação que são necessárias para avaliar a persistência temporal das variáveis estudadas. Note que os autocorrelogramas da inflação e da taxa de juros caem mais lentamente do que os autocorrelogramas do produto e o *spread* do termo. Adicionalmente, percebe-se que o produto apresenta, inclusive, autocorrelação negativa nos vencimentos mais longos.

## Tabela 2 – Função de Autocorrelação ACF – Persistência

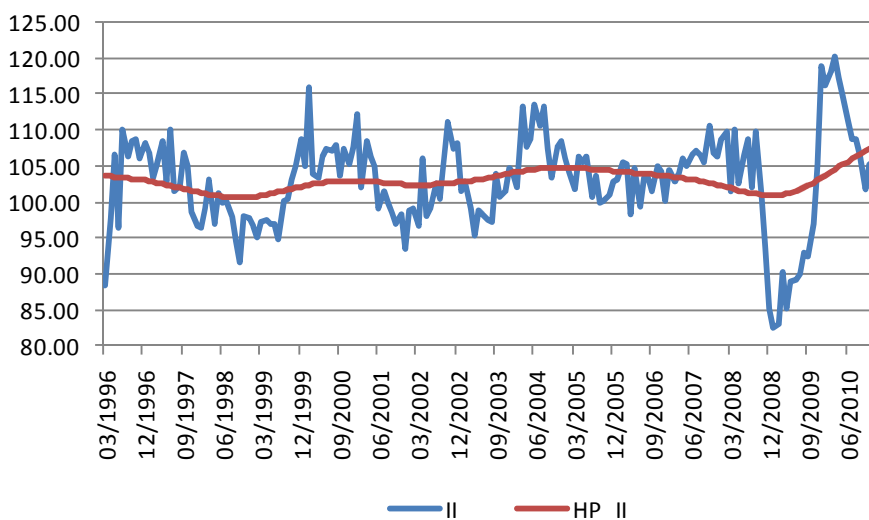
Diferença	ipca	II	Selic	ETTJ3m	ETTJ6m	ETTJ1a	ETTJ2a	ETTJ5a	ETTJ10a
1	0.9426	0.7433	0.9060	0.9253	0.9267	0.9257	0.9241	0.9237	0.9231
2	0.8625	0.6792	0.8016	0.8364	0.8413	0.8399	0.8357	0.8344	0.8336
3	0.7904	0.5741	0.7234	0.7708	0.6971	0.7803	0.7754	0.7734	0.7722
5	0.6249	0.2937	0.6194	0.6700	0.6060	0.7044	0.7033	0.7025	0.7007
8	0.3829	-0.0445	0.5078	0.5705	0.5992	0.6178	0.6179	0.6166	0.6132
10	0.2571	-0.2652	0.5390	0.5651	0.5855	0.5898	0.5848	0.5762	0.5676

Se o spread do termo possuir capacidade de prever as variáveis macroeconômicas, então ao aumentarmos o conjunto de informação dos agentes com a inclusão das informações da estrutura a termo estaremos melhorando a precisão dos parâmetros estruturais.

A evolução do hiato do produto pode ser acompanhada na figura 1, esta é uma variável importante na condução monetária pelo seu papel crucial no mecanismo de transmissão monetária de muitos modelos macroeconômicos.

A figura 1 mostra que a evolução do hiato do produto (produto efetivo menos produto potencial) fica acima de zero durante boa parte da amostra. Um desvio positivo é normalmente interpretado como uma *proxy* para o excesso de demanda. O hiato negativo pode ser uma resposta da política monetária agressiva à alta taxa de inflação ou por um aumento na taxa natural de produto, que permanece acima da tendência.

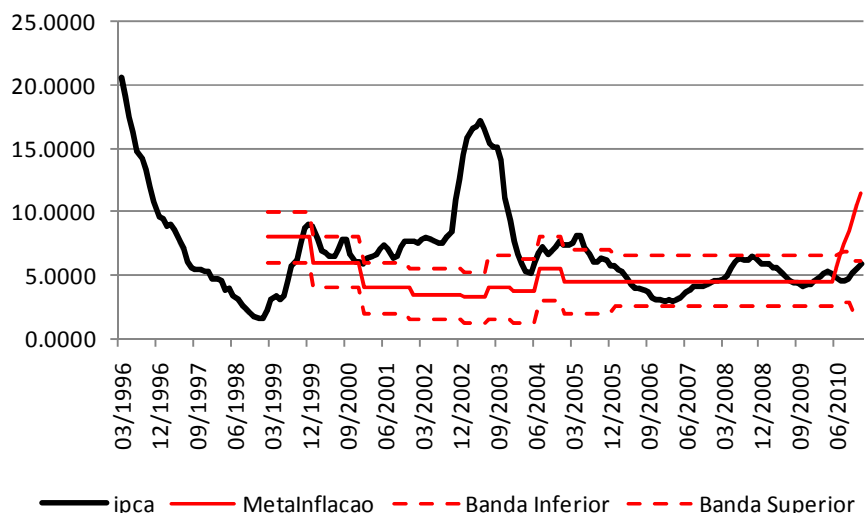
**Figura 1 – Evolução do Produto e Produto Natural**



A meta de inflação é uma variável importante na formação das expectativas do setor privado brasileiro, pois o conhecimento da meta de inflação é útil para tomar decisões de investimento real e financeiro. Mesmo que o banco central tenha um compromisso com a meta para inflação, nos momentos de ruptura financeira os agentes podem desconfiar da capacidade da autoridade monetária perseguir a meta estabelecida e podem acreditar que o banco central está perseguindo uma meta diferente da divulgada. Por outro lado, ao não

divulgar uma meta explícita, a importância de entender e prever essa variável torna-se ainda mais relevante para encontrar o equilíbrio no modelo estrutural da economia.

**Figura 2 – Evolução do IPCA e das Metas de Inflação no Brasil**



A figura 2 mostra que o IPCA ficou acima da meta de inflação divulgada pelo Banco Central do Brasil durante quase todo o período da amostra, entretanto, muitas vezes ficou dentro das faixas aceitáveis para sua flutuação, exceção ficou por conta dos anos de 2002 e 2003.

Section 4.3 analyzes our empirical results are robust to relevant macroeconomic and yield theories.

#### 4.2 Metodologia Empírica

O modelo macroeconômico a ser estimado para a economia brasileira corresponde ao sistema de equações simultâneas com  $z_t = (\pi_t \ y_t \ i_t \ sp_{n1,t} \ sp_{n2,t})'$ . Os dois termos da curva de juros escolhidos para calcular o *spread* do termo foram de 1 e 5 anos, e o *spread* é obtido pela diferença entre as taxas de juros de 1 e 5 anos e a taxa de juros de 1 dia denominada de taxa CDI.

Com cinco variáveis macroeconômicas que são a taxa de inflação, o produto da economia, a taxa de juros de curto prazo de condução monetária e os dois *spreads* para médio e longo prazo, vamos obter os quinze parâmetros estruturais da economia, que são  $\delta, \kappa, \sigma, \eta, \rho, \beta, \gamma, \lambda, \omega, d, \sigma_{AS}, \sigma_{IS}, \sigma_{MP}, \sigma_{y^n}$  e  $\sigma_{\pi^*}$ .

Para estimar os parâmetros dos modelos Novos Keynesianos é comum a utilização do estimador de Máxima Verossimilhança com Informação Completa (*Full Information Maximum Likelihood* – FIML). Um dos pressupostos para utilização do estimador FIML é que os erros sejam normalmente distribuídos.

A premissa da homocedasticidade dos resíduos é aceitável quando a hipótese das expectativas racionais é verificada e, com isso, temos que o *spread* do termo não varia no tempo.

Para testar a normalidade dos resíduos, a tabela 3 apresenta o teste Jarque-Bera, cujo resultado implica na rejeição da hipótese nula de normalidade nos resíduos em todas as cinco equações do sistema DSGE.

**Tabela 3 – Teste Jarque-Bera para normalidade dos resíduos FIML**

$\mathcal{E}_{AS,t}$		$\mathcal{E}_{IS,t}$		$\mathcal{E}_{MP,t}$		$\mathcal{E}_{y^n,t}$		$\mathcal{E}_{\pi^*,t}$	
JB	p-valor	JB	p-valor	JB	p-valor	JB	p-valor	JB	p-valor
77650,40	0,0000	61,7626	0,0000	147,9960	0,0000	46,3985	0,0000	1587,14	0,0000

O desvio da premissa de normalidade e a possível não homocedasticidade, prejudica a adoção do estimador da máxima verossimilhança com informação completa e, com isso, optamos em utilizar o estimador GMM em dois estágios, conforme Hansen (1982).

Como nosso artigo não tem o objetivo de avaliar os drifts é possível fazer o procedimento de estimação com os valores da amostra subtraídos de sua média  $\bar{z}_t = z_t - \hat{E}z_t$ , implicando no modelo do tipo  $\bar{z}_t = \Omega_z \bar{z}_{t-1} + \Gamma_z u_t$  com  $u_t = \Sigma^{-1} \varepsilon_t \sim (0, I_5)$  e onde a matriz de covariância é do tipo  $\Sigma = \text{diag} \left( \left[ \sigma_{AS} \quad \sigma_{IS} \quad \sigma_{MP} \quad \sigma_{y^n} \quad \sigma_{\pi^*} \right] \right)$ .

Inicialmente, note que o sistema tem 15 parâmetros estruturais que precisam ser estimados estão divididos nas cinco equações. Na curva IS temos que estimar  $\sigma$  e  $\eta$  ou  $\mu$  e  $\phi$ , pois  $\mu = \sigma\phi$  e  $\phi = 1/(\sigma + \eta)$ . Na curva de Phillips estimaremos  $\delta$  e  $\kappa$  porque indiretamente obtemos  $(1 - \delta)$  e  $\chi$ , pois  $1 = \delta + (1 - \delta)$  e  $\kappa = \sigma + \chi$  ou  $\chi = \kappa - \sigma$ . Na curva de regra de política monetária vamos obter  $\rho$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Na equação do produto natural temos que encontrar  $\lambda$ , que pode ocorrer via estimação ou de forma indireta, dependendo da escolha dos parâmetros a serem estimados na curva IS, pois  $\lambda = \eta/(\sigma + \chi)$ . Na definição da meta de inflação temos  $d$  e  $\omega$ , pois obtemos indiretamente  $\varphi_1 = \omega/(1 + d\omega)$ ,  $\varphi_2 = d/(1 + d\omega)$  e  $\varphi_3 = 1 - \varphi_1 - \varphi_2$ . Note que, a princípio, não faz sentido a inclusão da inflação corrente na apuração da meta de inflação, mas, como mostrado no apêndice, essa variável vai aparecer com a demonstração da quinta equação e esperamos que o coeficiente de  $\varphi$  assumo o valor nulo. Por último temos os cinco desvios padrão que representam os resíduos macroeconômicos  $\sigma_{AS}$ ,  $\sigma_{IS}$ ,  $\sigma_{MP}$ ,  $\sigma_{y^n}$  e  $\sigma_{\pi^*}$ .

Para utilizar o método GMM é necessário definir as condições de momentos que serão utilizadas, as quais são definidas como  $h_t = \begin{bmatrix} h'_{1,t} & h'_{2,t} \end{bmatrix}$ , onde  $h_{1,t} = u_t \otimes \bar{z}_{t-1}$ ,  $h_{2,t} = \text{vech}(u_t u_t' - I_5)$  e  $E[h_t] = 0$ .

Considerando que  $h_t = \begin{bmatrix} h'_{1,t} & h'_{2,t} \end{bmatrix}$  e que  $W = \left( \begin{bmatrix} h_t & h_t' \end{bmatrix} \right)^{-1}$ , então a matriz de ponderação ótima será:

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} I \otimes \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \bar{z}_{t-1} \bar{z}_{t-1}' & 0_{25 \times 15} \\ 0_{15 \times 25} & I_{15} + \text{vech}(I_5) \text{vech}(I_5)' \end{bmatrix}^{-1}$$

Observe que essa matriz não depende dos parâmetros, somente depende das variáveis macroeconômicas e dos *spreads* do termo escolhidos, isto é, demonstramos que as cinco variáveis que são inflação, produto, juros de curto prazo, spread de médio prazo e spread de longo prazo serão suficientes para obtermos todos os parâmetros estruturais da economia.

Assim, temos 40 condições dos momentos e 15 parâmetros a serem estimados em cinco equações do sistema, pois os demais serão obtidos de forma indireta. Dessa forma, percebemos que estamos diante de uma distribuição  $\chi^2$  com 25 graus de liberdade, porque existem 40 condições momentos e 15 parâmetros.

As variáveis utilizadas como instrumentos são as variáveis dependentes defasadas e incluímos um instrumento adicional que é o spread do termo de 10 anos.

Note que uma variável instrumental precisa satisfazer a duas exigências, ser correlacionada com as variáveis endógenas e ser ortogonais aos erros. Portanto, a independência dos instrumentos em relação a um erro que não é observável pode ser verificada se, e somente se, o número de instrumentos excluídos da equação excede o número de variáveis endógenas incluídas. Esse teste pode ser realizado como um diagnóstico padrão em qualquer estimativa de variáveis instrumentais sobreidentificadas.

Esse teste apresenta duas hipóteses conjuntas, a especificação do modelo correto e as condições de ortogonalidade. A rejeição da hipótese nula pode ser decorrente de uma ou ambas as hipóteses. Para testar a restrição de sobreidentificação, podemos utilizar a estatística  $J$  de Hansen (1982) e discutida por Baum (2003), onde essa estatística é o valor da função objetivo GMM, avaliada no estimador eficiente. A hipótese nula representada por:

$$J(Q_{EGMM}) = n(\hat{E}[h_t])' \hat{W}(\hat{E}[h_t]) \sim \chi^2_{L-K}$$

A estatística  $J$  é distribuída  $\chi^2$  com o número de graus de liberdade sendo igual ao número de restrições sobreidentificadas ( $L - K$ ) preferentemente ao número de condições dos momentos  $L$ , pois os  $K$  graus de liberdades são utilizados na estimação dos coeficientes. Uma rejeição da hipótese nula implica que os instrumentos não satisfazem a condição de ortogonalidade exigida, seja porque eles não são exógenos ou porque foram incorretamente excluídos da regressão.

O teste aplicado nesta amostra não rejeitou que os instrumentos são válidos aos níveis de 5% e 1%, pois a estatística calculada ficou em 10,842 e as estatísticas tabeladas correspondem a 14,611 e 11,524, respectivamente.

### **4.3 Resultados Empíricos**

A tabela 4 discrimina os parâmetros estimados obtidos de forma direta pelo estimador GMM de dois estágios e de forma indireta pela relações lineares entre alguns parâmetros, conforme discriminado no apêndice. Os coeficientes estimados apresentaram muitos sinais esperados e próximos aos encontrados no trabalho de Bekaert, Cho e Moreno (2010) para a economia norte-americana. Obviamente existem diferenças na magnitude dos parâmetros estimados, no erro padrão dos mesmos e alguns resultados diferentes por estarmos avaliando a economia brasileira.

Os parâmetros estruturais que foram estimados apresentam o erro-padrão ao lado e os demais são obtidos por relação linear com outros parâmetros. Para obtermos os resultados estimados devemos escolher as opções de simulação, na tabela 4 a estimação utilizou a produção industrial física do IBGE, os *spreads* de 1 e 5 anos (médio e longo prazo), estimou  $\sigma$  e  $\eta$  ao invés de  $\mu$  e  $\phi$  e definiu  $\psi$  em 0.99 ao invés de deixar  $\psi$  livre. Outros resultados e suas decomposições das variâncias foram testados e estão discriminados nas tabelas e gráficos do apêndice I.

Dentre os parâmetros estimados na curva IS, o impacto do produto esperado  $\mu$  ficou em 0,456 e abaixo do impacto do produto passado em  $(1-\mu)$  em 0,544 que mostra a relevância do produto passado na formação do produto corrente. Por outro lado, o parâmetro da taxa de juros real  $\phi$  ficou em 0,141 e superior ao observado nos EUA de 0,134. O desvio-padrão dos resíduos  $\sigma_{IS}$  foi elevado, ficando em 2,556 com o erro padrão de 0,076.

A análise da elasticidade intertemporal inversa de substituição  $\sigma$  mostra que se ela for elevada, então temos um indicativo de que a curva IS é um canal de pouca eficácia na transmissão da política monetária. Na literatura macroeconômica esse parâmetro de curvatura da função utilidade do consumidor representativo  $\sigma$  deve ficar entre 1 e 4, conforme Lucas. Nossa estimação encontrou um parâmetro  $\sigma$  igual a 3,238 que é pouco superior ao 3,156 obtido por Bekaert, Cho e Moreno para os Estados Unidos da América do Norte.

Por outro lado, o grau de dependência do hábito do modelo estimado sobre o nível de consumo passado  $\eta$  ficou em 3,863 indicativo de uma persistência do hábito do consumo passado que é significativa e superior ao observado na economia norte-americana. A título ilustrativo, o parâmetro de Fuhrer (2000) ficou em  $h = 1,726$ , pois sabemos que existe uma relação linear do parâmetro daquele autor com o parâmetro deste modelo que é do tipo  $\eta = \eta / (\sigma - 1)$ .

Dentre os parâmetros estimados na curva de Phillips, o componente *forward-looking*  $\delta$  ficou em 0,437 e o componente *backward-looking*  $\delta_2 = (1-\delta)$  foi igual a 0,563. Esse resultado é oposto ao verificado por Bekaert, Cho e Moreno nos EUA. Além disso, a elasticidade intertemporal inversa da oferta de trabalho  $\chi$  ficou em 0,773.

O impacto do hiato do produto  $\kappa$  ficou em 0,117, com erro padrão de 0,013. O desvio-padrão dos resíduos da curva de Phillips  $\sigma_{AS}$  foi elevado e igual a 5,192 com erro padrão de 0,235.

Na estimação da regra de política monetária, o parâmetro que avalia o impacto da taxa de juros passada  $\rho$  ficou em 0,813 e erro-padrão de 0,009. Por outro lado, a diferença entre a inflação esperada e a meta de inflação medida pelo parâmetro  $\beta$  ficou em 1,991 e esse resultado foi superior ao parâmetro de 1,525 da economia norte-americana.

#### **Tabela 4 – Estimação pelo Método GMM em dois estágios**



Parâmetros	Estimativa	Erro-padrão
<b>Curva IS</b>		
$\mu$	0,456	
$(1-\mu)$	0,544	
$\phi$	0,141	
$\sigma$	3,238	0,165
$\eta$	3,863	0,080
$h$	1,726	
<b>Curva de Phillips</b>		
$\delta = \delta_1$	0,437	0,010
$(1 - \delta) = \delta_2$	0,563	
$\kappa$	0,117	0,013
$\chi$	0,773	
$\tau$	1,279	
$\theta$	0,777	
$\varpi$	0,029	
$\zeta$	0,207	
<b>Regra de Política Monetária</b>		
$\rho$	0,813	0,009
$\beta$	1,991	0,139
$\gamma$	0,002	0,048
<b>Produto Natural Endógeno</b>		
$\lambda$	0,963	0,017
$\vartheta$	1,771	
<b>Meta de Inflação</b>		
$d$	0,412	
$\omega$	0,993	0,083
$\varphi_1$	0,497	
$\varphi_2$	0,503	
$\varphi_3$	0,000	
<b>Desvio-padrão dos choques</b>		
$\sigma_{AS,t}$	5,192	0,235
$\sigma_{IS,t}$	2,556	0,076
$\sigma_{MP,t}$	5,978	0,153
$\sigma_{y^n,t}$	4,110	0,119
$\sigma_{\pi^*,t}$	3,393	0,158

Ainda na regra de política monetária temos o impacto do hiato do produto  $\gamma$  de 0,002 e erro-padrão de 0,048. O desvio-padrão dos resíduos da equação da regra de política monetária  $\sigma_{MP}$  ficou em 5,978 e erro-padrão de 0,153.

Uma das inovações desse modelo é a determinação do produto natural, onde o coeficiente estimado indica que o impacto do produto natural passado  $\lambda$  ficou em 0,963 e erro-padrão de 0,017. O desvio-padrão dos resíduos  $\sigma_{y^n}$  ficou em 4,110 com erro-padrão de 0,119. A relação entre persistência endógena do produto natural sobre resposta produto real corrente às mudanças no produto real passado  $\vartheta$  foi de 1,771.

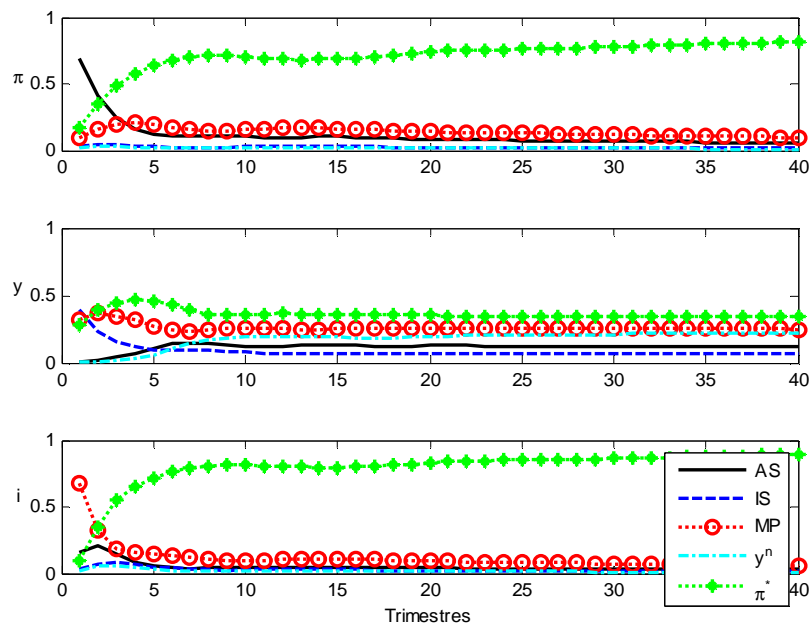
Outra contribuição inovadora desse modelo é a determinação da meta de inflação de forma endógena, onde percebemos que o parâmetro do peso das taxas de inflação futura na

definição da taxa de inflação de longo prazo  $d$  ficou em 0,412 e o parâmetro de suavização da inflação passada na determinação da meta de inflação  $\omega$  ficou em 0,993.

A resposta da meta inflação futura às mudanças na meta corrente  $\varphi_1$  ficou em 0,497 e a resposta da meta inflação passada às mudanças na meta corrente  $\varphi_2$  ficou em 0,503. Como esperado, a resposta da inflação corrente às mudanças na meta corrente  $\varphi_3$  é nula. O desvio-padrão dos resíduos da trajetória da meta de inflação  $\sigma_{\pi^*}$  ficou em 3,393 com erro-padrão de 0,158.

Adicionalmente, a decomposição da variância descrita na figura 3 mostra a contribuição de cada choque macroeconômico para a variação da variável macroeconômica em diferentes horizontes temporais. Note que variância da inflação no curto prazo é explicada pelo choque da curva de Phillips (AS), mas a partir do terceiro trimestre é explicada pelos choques da meta de inflação e, em menor grau, da política monetária e da curva de Phillips. A variância do produto, no curto prazo, é explicada pelos choques da curva IS, da meta de inflação e da política monetária e no médio e longo prazo passa a sofrer a influência do choque no produto natural e da curva de Phillips. A variação da taxa de juros de curto prazo é explicada, no horizonte de curto prazo, pelo choque de política monetária, mas nos horizontes temporais posteriores ao terceiro trimestre essa variação é explicada pelo choque da meta de inflação.

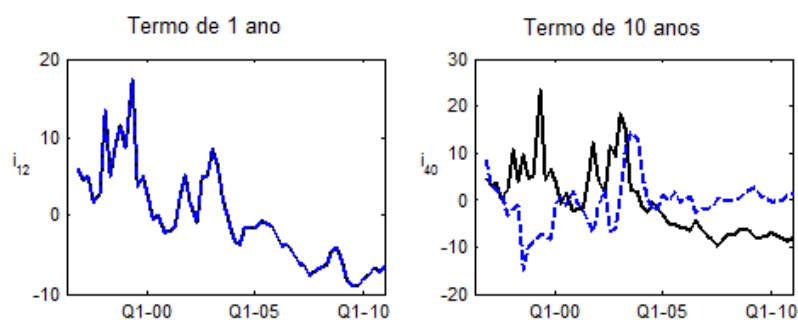
**Figura 3 – Decomposição da Variância – Inflação, Produto e Juros**



Como o Banco Central do Brasil é responsável pelos choques de política monetária e da meta de inflação, percebe-se a importância da política monetária na definição da inflação e das taxas de juros, principalmente. Para o nível de produção da economia notamos que, além política monetária, os choques de produtividade e da curva IS também são relevantes.

Uma pergunta que surge é saber se o modelo macroeconômico e financeiro que estima as variáveis macroeconômicas e a curva de juros se ajusta bem em toda a estrutura a termo. Para responder a essa pergunta, podemos avaliar a diferença entre os valores observados na estrutura a termo de juros e os valores previstos pelo modelo, ou seja, observar o erro de medição por intermédio da figura 4.

**Figura 4 – Ajuste da ETTJ do Modelo DSGE-Financeiro**  
 ETTJ Mercado Financeiro vs ETTJ derivada do Modelo



Após observar o modelo, é importante avaliar como se propagam e quais são os efeitos dos choques na curva IS, na curva de Phillips, na política monetária, no produto natural e na meta de inflação. Para tanto, utilizaremos as funções de impulso e resposta, em relação ao equilíbrio no estado estacionário.

A idéia da função impulso resposta é mostrar, graficamente, o que acontece com a variável de interesse em resposta a um choque exógeno da economia, condicionado a economia estar em equilíbrio antes do choque. Em outras palavras, observar a resposta de uma determinada variável a um choque específico, como resultado de efeitos transitórios sobre o estado estacionário da economia que são avaliados para a curva de juros praticada no mercado financeiro brasileiro.

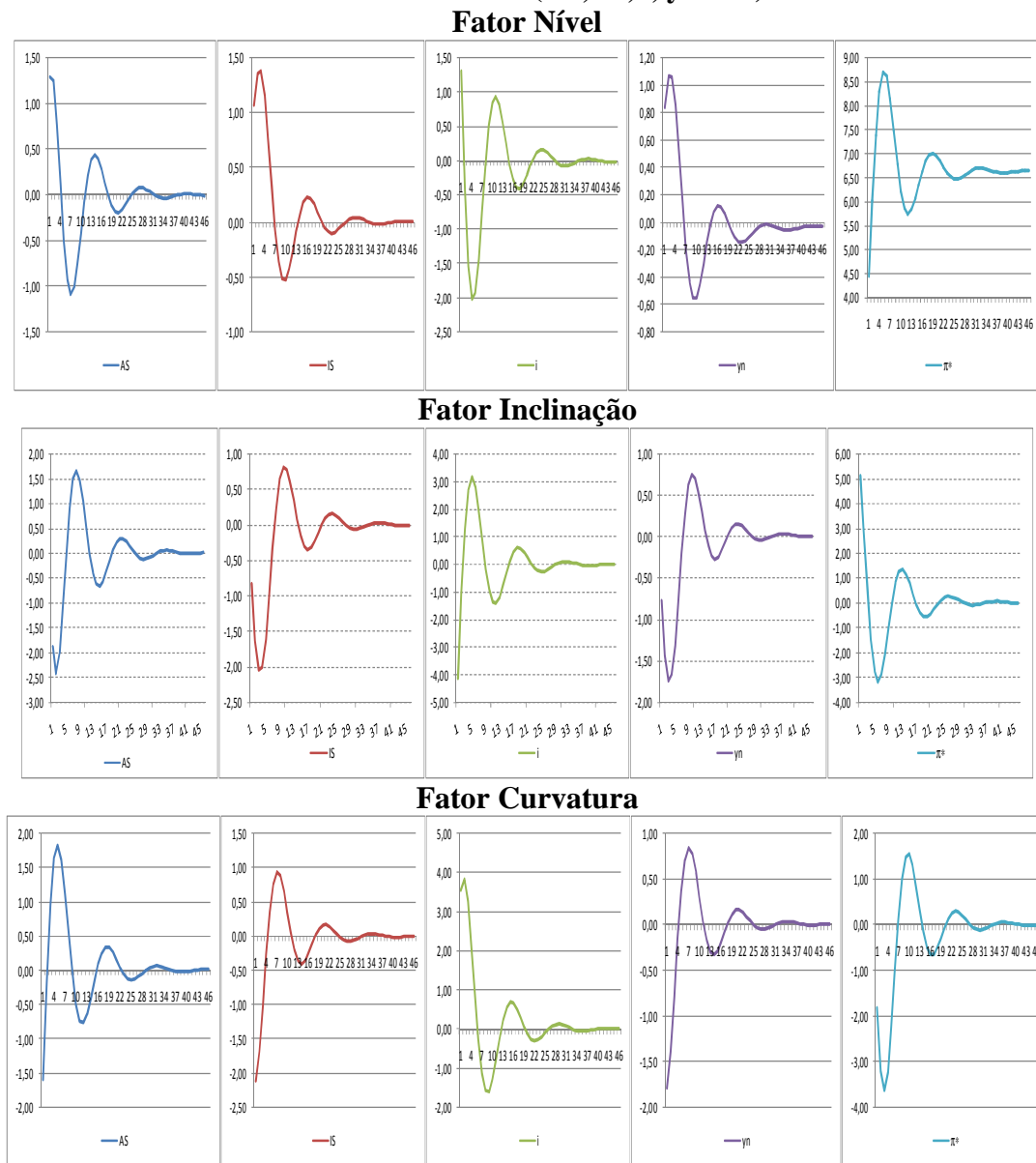
Note que quando duas variáveis estão correlacionadas no tempo, de tal forma que exista uma relação estável entre ambas, espera-se que um choque sobre uma das variáveis se propague para a outra variável, sendo esse choque conhecido como inovação ou impulso. Para verificar esse efeito, as figuras a seguir apresentam o efeito dos juros no mercado financeiro diante de impulsos nas demais variáveis, entre 1 e 50 trimestres, considerando um impulso na magnitude de 1 ponto percentual.

Como visto nos capítulos anteriores desta tese, é comum a literatura financeira utilizar os três fatores latentes obtidos com informações da própria estrutura a termo de juros para avaliar sua dinâmica, sem a preocupação de considerar os impactos decorrentes de choques macroeconômicos. Nesta seção vamos avaliar esse aspecto e, para tanto, o nível é considerado como a média ponderada das taxas de 1 dia, 1 ano e 5 anos, a inclinação como sendo o spread de 10 anos e a curvatura é representada pela soma da taxa de 1 dia e de 5 anos menos duas vezes a taxa de 1 ano, seguindo, quando for conveniente, Bekaert, Cho e Moreno (2010).

Assim, a figura 5 mostra a resposta dos fatores latentes da curva de juros do mercado financeiro brasileiro aos impulsos decorrentes de choques estruturais da economia (AS, IS,  $i$ ,  $y^n$ ,  $\pi^*$ ). Inicialmente, vamos analisar o choque da curva de Phillips (AS) sobre os fatores latentes, de imediato o choque aumenta o fator nível, mas, logo depois, reduz o nível para abaixo do estado estacionário até o décimo trimestre. Esse undershooting na taxa de juros pode estar relacionado com uma resposta endógena da autoridade monetária para conter a inflação, que diminui a inflação abaixo do estado estacionário por certo tempo, conforme observado também em Bekaert, Cho e Morento (2010). Na avaliação do impacto sobre o fator inclinação, note que de imediato cai abaixo do estado estacionário, cai um pouco mais em seguida, e posteriormente quando o nível fica negativo faz com que a inclinação aumente acima do estado estacionário. O efeito sobre o fator curvatura é uma queda seguida de aumento para acima do estado estacionário e vai oscilando até se acomodar no estado estacionário.

O segundo choque macroeconômico é o impulso na curva IS, cuja resposta do fator nível é o aumento, seguido de outro aumento suave, ficando acima do nível do estado estacionário até o décimo trimestre. No fator inclinação e curvatura o efeito é inverso, reduzindo esses fatores, o que pode estar associado à curva em forma de corcunda da figura 3 e com a hipótese das expectativas racionais cujo efeito dever indicar uma reposta maior nos prazos mais curtos.

**Figura 5 – Impulso Resposta dos Fatores Latentes da ETTJ frente aos choques macroeconômicos (AS, IS,  $i$ ,  $y^n$  e  $\pi^*$ )**



O terceiro choque macroeconômico é o choque macroeconômico na taxa de curto prazo, ou taxa Selic. O impulso desse choque provoca como resposta um aumento inicial do fator nível, seguido por uma queda abrupta que mantém o nível abaixo do estado estacionário até o sétimo trimestre, que pode estar associado ao undershooting da taxa de juros de curto prazo após um choque de política monetária. A resposta do fator inclinação é uma queda de imediato que mantém o fator abaixo do nível estacionário até o quinto trimestre, quando começa a oscilar em torno do referido nível até convergir. O resultado de queda imediata pode indicar que o choque de política monetária aumenta a taxa de curto prazo e reduz a taxa de

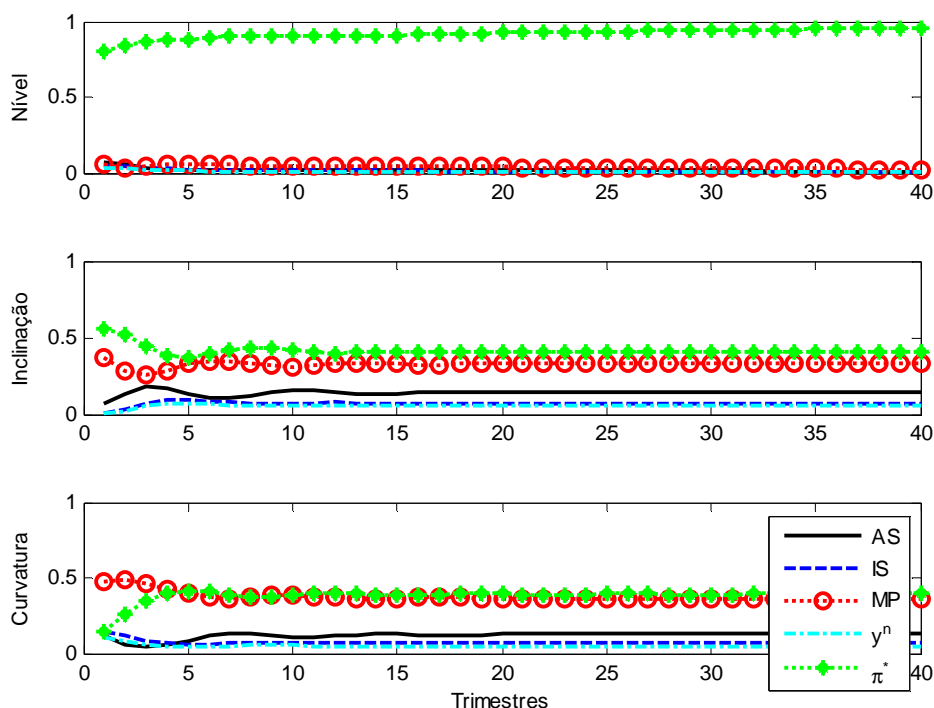
longo prazo pelos reflexos sobre as expectativas de inflação futura. O fator curvatura fica acima do estado estacionário por seis trimestres e depois vai oscilando até convergir.

O impulso no choque de produtividade representado pelo choque no produto natural obtido de forma endógena mostra uma resposta que aumenta o fator nível de imediato, diferentemente do que foi observado na economia norte-americana, segundo o trabalho de Bekaert, Cho e Moreno (2010). Entretanto, no longo prazo os resultados são semelhantes.

Por último temos o impulso sobre o choque nas metas de inflação que são obtidas de forma endógena, cuja resposta aumentou o fator nível e, surpreendentemente, a convergência ocorre num nível superior ao estado estacionário. Esse efeito também foi observado na economia americana, mas o nível nos EUA volta a ficar próximo ao estado estacionário, indicativo de uma forte persistência das taxas de juros ao choque. Os impulsos sobre os fatores inclinação e curvatura voltam para o estado estacionário.

A figura 6 mostra a decomposição da variância do nível, onde o choque da meta de inflação explica mais de 70% da variação do nível no curto prazo e quase 100% da variação no longo prazo, os demais choques não têm um poder de explicação significativo sobre o fator nível.

**Figura 6 – Decomposição da Variância – Fatores Latentes da ETTJ**



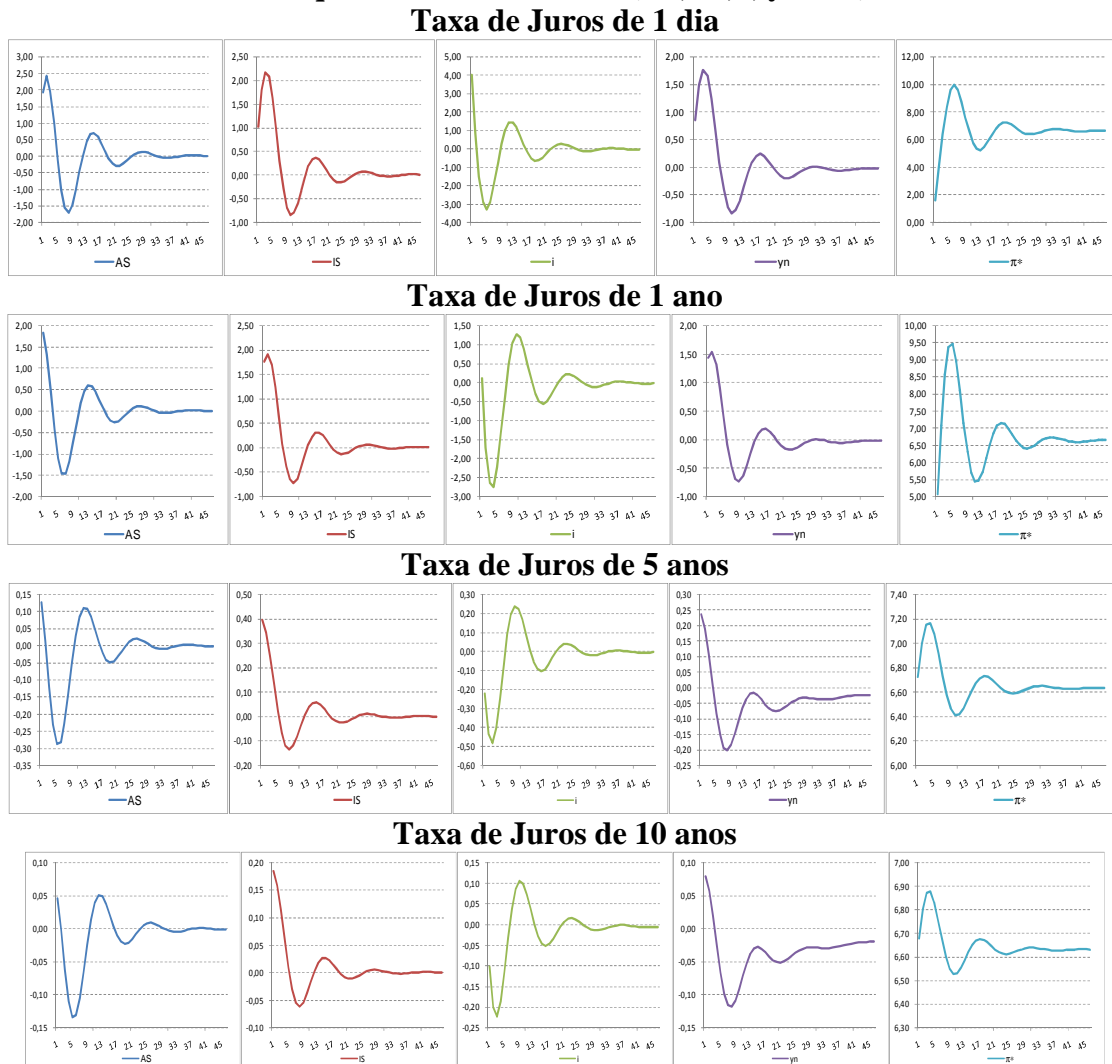
No fator inclinação observamos que o choque de meta de inflação explica um pouco mais de 50% e o choque de política monetária um pouco menos, no médio e longo prazo esses dois choques explicam, aproximadamente, 40% da variação no fator inclinação. Outro choque importante para explicar as variações no fator inclinação é o choque da curva de Phillips (AS), que fica pouco abaixo de 10% no curto prazo, mas no médio e longo prazo fica em, aproximadamente, 20%. Os choques da curva IS e de produtividade (produto natural endógeno) representam entre 5% e 10% das variações na inclinação da curva de juros do mercado financeiro brasileiro.

A decomposição da variância do último fator latente, a curvatura, indica que o choque de política monetária explica entre 40% e 50% em todo horizonte temporal avaliado. O choque de meta de inflação no curto prazo é pouco significativo para explicar as variações

no fator curvatura, mas no médio e longo prazo é tão significativo quanto o choque de política monetária. A exemplo do fator inclinação, a importância do choque da curva de Phillips é seguida dos choques da curva IS e do produto natural, na explicação da variação do fator curvatura.

Para complementar a análise das funções impulso e da decomposição da variância sobre os fatores latentes, a figura 7 mostra o efeito do impulso sobre os cinco choques macroeconômicos que implica em determinadas respostas das taxas de juros de 1 dia, de 1 ano, de 5 anos e de 10 anos.

**Figura 7 – Impulso Resposta da Estrutura a Termo de Taxas de juros frente aos choques macroeconômicos (AS, IS,  $i$ ,  $y^n$  e  $\pi^*$ )**



No fator inclinação observamos que o choque de meta de inflação explica um pouco mais de 50% e o choque de política monetária um pouco menos, no médio e longo prazo esses dois choques explicam, aproximadamente, 40% da variação no fator inclinação. Outro choque importante para explicar as variações no fator inclinação é o choque da curva de Phillips (AS), que fica pouco abaixo de 10% no curto prazo, mas no médio e longo prazo fica em, aproximadamente, 20%. Os choques da curva IS e de produtividade (produto natural endógeno) representam entre 5% e 10% das variações na inclinação da curva de juros do mercado financeiro brasileiro.

O choque da curva de Phillips (ou demanda agregada, AS) sobre as taxas de juros aumenta de imediato as taxas e vai oscilando em torno do estado estacionário até convergir após quarenta trimestres. Outro aspecto relevante é o impacto é maior nas taxas dos termos de curto prazo e vai reduzindo o impacto conforme vai aumentando o termo, até a taxa de 10 anos.

O choque na curva IS tem como resposta um aumento nas taxas de juros de todos os termos, com efeito semelhante na taxa para 1 dia e para 1 ano (4 trimestres). Nos termos de 5 anos (20 trimestres) e 10 anos (40 trimestres) o efeito do aumento vai reduzindo.

O choque de política monetária mostra um aumento relevante na taxa de juros de 1 dia e vai oscilando até convergir no estado estacionário. A resposta da taxa de 1 ano é um suave aumento e posterior oscilação até a convergência. Nas taxas para 5 e 10 anos o efeito é uma redução nas taxas com impacto maior de queda na taxa de 20 trimestres.

O choque de produtividade tem como resposta um aumento no curto prazo de todos os termos das taxas de juros. Os efeitos de curto nas taxas de 1 dia e 1 ano são semelhantes e nas taxas de 5 e 10 anos vão reduzindo, todos vão oscilando até convergir no estado estacionário.

Os choques nas metas de inflação aumentam todos os termos das taxas de juros no horizonte de curto prazo, mas os efeitos são maiores sobre os termos de prazos mais curtos (1 dia e 1 ano), quando comparado aos termos de longo prazo (5 e 10 anos).

Assim, percebemos que existem indícios de que a transmissão monetária no Brasil não é muito elevada, quando estimamos o período de março/1996 a dezembro/2010, pelo método GMM em dois estágios.

O grau de dependência do consumo passado na economia brasileira é alto e o coeficiente que avalia a diferença entre a inflação esperada e a meta de inflação é uma variável importante na condução da política monetária.

A novidade estimar o produto natural de forma endógena mostra que o produto natural do período passado é relevante para definir o produto natural corrente.

A análise da decomposição da variância mostra a importância da meta de inflação para explicar os choques na inflação corrente e na taxa de juros. Por outro lado, os choques no produto corrente são explicados pelo produto natural, pela política monetária, pela curva de Phillips e pela meta de inflação, de forma aproximadamente igual.

Por fim, percebemos que as variáveis macroeconômicas são importantes para explicar o comportamento da estrutura a termo de taxas de juros. O fator nível da curva de juros foi explicado pela meta de inflação, o fator curvatura foi explicado pela meta de inflação e pela regra de política monetária e o fator inclinação da curva de juros foi explicado pela curva de Phillips, pela meta de inflação e pela regra de política.

## **5 Conclusões**

Os modelos dos novos keynesianos são parcimoniosos e, devido a essa característica, possuem informação limitada. Ao incorporarmos a informação contida na estrutura a termo de taxas de juros estamos ajudando a recuperar importantes parâmetros estruturais. Além disso, ao incluir um componente de hábito externo do consumo passado e incluindo duas equações para definir a trajetória do produto natural e da meta de inflação, estamos gerando persistências endógenas adicionais.

Os resultados obtidos mostram boas e grandes estimativas para a curva de Phillips, para o parâmetro da taxa de juros real e o modelo exibe uma relevante resposta contemporânea da estrutura a termo aos cinco choques macroeconômicos estruturais do modelo.

Dentre os parâmetros estimados na curva IS, o impacto do produto esperado foi menor que o impacto do produto passado, que mostra a relevância do produto passado na formação do produto corrente. Por outro lado, o parâmetro da taxa de juros real foi ligeiramente superior ao observado nos EUA. A elasticidade intertemporal inversa de substituição mostrou que a curva IS é um canal de pouca eficácia na transmissão da política monetária.

Na curva de Phillips, o componente *forward-looking* foi inferior ao componente *backward-looking*, resultado oposto ao verificado por Bekaert, Cho e Moreno nos EUA.

Na estimação da regra de política monetária, a diferença entre a inflação esperada e a meta de inflação medida pelo parâmetro foi 20% superior ao verificado na economia norte-americana.

Uma contribuição importante desse modelo é perceber que o parâmetro do peso das taxas de inflação futura na definição da taxa de inflação de longo prazo é menor do que o parâmetro de suavização da inflação passada na determinação da meta de inflação.

A variância da inflação no curto prazo é explicada, principalmente, pelo choque da curva de Phillips. A variância do produto, no curto prazo, é explicada pelos choques da curva IS, da meta de inflação e da política monetária e no médio e longo prazo passa a sofrer a influência do choque no produto natural e da curva de Phillips. A variação da taxa de juros de curto prazo é explicada, no horizonte de curto prazo, pelo choque de política monetária, mas nos horizontes temporais posteriores ao terceiro trimestre essa variação é explicada pelo choque da meta de inflação.

Assim, percebemos a importância da política monetária na definição da inflação e das taxas de juros. Quanto ao nível de produção, notamos que, além política monetária, os choques de produtividade e da curva IS também são relevantes.

Adicionalmente, concluímos que esse modelo macroeconômico e financeiro se ajusta melhor à estrutura a termo de juros da economia brasileira do que os modelos de vetor autoregressivo tradicional no DSGE, quando comparamos os erros de medição.

O impulso da curva de Phillips sobre os fatores latentes, de imediato o choque aumenta o fator nível, esse undershooting na taxa de juros pode estar relacionado com uma resposta endógena da autoridade monetária para conter a inflação, que diminui a inflação abaixo do estado estacionário por certo tempo. O impulso na curva IS tem como resposta o aumento do fator nível e o impulso do choque de política monetária provoca uma resposta de aumento inicial do fator nível, seguido por uma queda abrupta, que pode estar associado ao undershooting da taxa de juros de curto prazo após um choque de política monetária. Os impulsos no choque de produtividade e no choque nas metas de inflação aumentam o fator nível.

O choque de política monetária mostra um aumento relevante na taxa de juros de 1 dia e vai oscilando até convergir no estado estacionário. A resposta da taxa de 1 ano é um suave aumento e posterior oscilação até a convergência. Nas taxas para 5 e 10 anos o efeito é uma redução nas taxas com impacto maior de queda na taxa de 20 trimestres.

O choque de produtividade tem como resposta um aumento no curto prazo de todos os termos das taxas de juros. Os efeitos de curto nas taxas de 1 dia e 1 ano são semelhantes e nas taxas de 5 e 10 anos vão reduzindo, todos vão oscilando até convergir no estado estacionário.

Os choques nas metas de inflação aumentam todos os termos das taxas de juros no horizonte de curto prazo, mas os efeitos são maiores sobre os termos de prazos mais curtos (1 dia e 1 ano), quando comparado aos termos de longo prazo (5 e 10 anos).

Logo, existem indícios de que a transmissão monetária no Brasil não é muito elevada e que o grau de dependência do consumo passado na economia brasileira é alto. A novidade



estimar o produto natural de forma endógena mostra que o produto natural do período passado é relevante para definir o produto natural corrente.

Por fim, e com a mesma conclusão obtida nos outros capítulos anteriores, percebemos que as variáveis macroeconômicas são importantes para explicar o comportamento da estrutura a termo de taxas de juros. O fator nível da curva de juros foi explicado pela meta de inflação, o fator curvatura foi explicado pela meta de inflação e pela regra de política monetária e o fator inclinação da curva de juros foi explicado pela curva de Phillips, pela meta de inflação e pela regra de política.

## Referências

- [1] Baum, Christopher F. e Mark E. Schaffer (2003). Instrumental variables and GMM: estimation and testing, *The Stata Journal* 3, nr. 1, pp. 1-31.
- [2] Bekaert, Geert; Senghoon Cho, e Antonio Moreno (2010). “New-Keynesian Macroeconomics and the Term Structure”, *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 42, nº. 1, p. 33-62.
- [3] Cochrane, John H. (2001). “Asset Pricing”, Princeton NJ: Princeton University Press.
- [4] Cox, John; Jonathan Ingersoll e Stephen Ross (1985). “A theory of term structure of interest rates”, *Econometrica* 53, 385-408.
- [5] Fuhrer, Jeffrey C. (2000). “Habit Formation in Consumption and Its Implications for Monetary-Policy Models”, *American Economic Review* 90, 367-389.
- [6] Galí, J. (2008). *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework*. Princeton University Press.
- [7] Hansen, L. P. (1982). “Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators”, *Econometrica*, 50, 1029–1054.
- [8] Harrison, J.M. and D. Kreps (1979). “Martingales and Arbitrages in Multiperiod Security Markets,” *Journal of Economic Theory*, Vol. 20, pp. 381–408.
- [9] Heath, D., R. Jarrow e A. Morton, (1992). Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation. *Econometrica*, 60, 77-105.
- [10] Ho, T.S.Y, and S.-B. Lee, 1986, “Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims,” *The Journal of Finance*, Vol. 41, pp. 1011–29.
- [11] Hull, J. and A. White, 1990a, “Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 25, pp. 87–100.
- [12] Lucas Jr., Robert E. (1978). “Asset prices in an exchange economy”, *Econometrica* 46, 1426-1446.
- [13] Merton, R (1973). The Theory of Rational Option Pricing, *Journal of Economics and Management Science* 4, p. 141-183.
- [14] Vasicek, Oldrich (1977). *An Equilibrium Characterization of the Term Structure*. *Journal of Financial Economics* 5, p. 177-188.
- [15] Woodford, Michael (2003). “Interest and Prices – Foundations of a Theory of Monetary Policy”, Princeton University Press, USA.